ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу
Дикарева Егора Евгеньевича
«Гармонический анализ некоторых классов линейных операторов»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ

1. Актуальность. Диссертационная работа посвящена избранным задачам спектральной теории линейных операторов, действующих в банаховых пространствах, и продолжает исследования начатые С.Н. Бернштейном, Г. Бором, Ж. Фаваром, К. Фойашем, Ю.И. Любичем, Б.М. Левитаном, А.Г. Баскаковым и другими. Гармоническому анализу линейных операторов посвящены многочисленные работы отечественных и зарубежных математиков. Кроме того, актуальность темы исследования рассматриваемой диссертации и важность решаемых в ней задач определяется широким классом рассматриваемых операторов, которые находят применение при изучении дифференциальных и разностных уравнений. Основными методами исследования являются методы абстрактного гармонического анализа, спектральной теории банаховых модулей, спектральной теории функций и операторов, теории представлений групп в банаховых пространствах.

2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность и новизна. Диссертация состоит из введения, по существу совпадающего с авторефератом, четырех глав основного текста, списка литературы, охватывающего 72 наименования и насчитывает 101 страницу.

1. Первая глава «Элементы спектральной теории линейных операторов и полугрупп линейных операторов» носит вспомогательный характер. В ней приводятся сведения, которые используются при получении основных результатов диссертации.

Основные результаты сформулированы и полностью доказаны в следующих трех главах. Их научная новизна заключается в следующем.

2. Вторая глава «Гармонический анализ линейных операторов в вещественных банаховых пространствах» посвящена изложению спектральной теории линейных операторов в вещественных банаховых пространствах. Новизна исследований определяется тем, что большинство приложений связано с рассмотрением дифференциальных, разностных и интегральных уравнений в вещественных банаховых пространствах. Классическая спектральная теория, как правило, строится в комплексных банаховых пространствах. При построении теории рассматривается комплексификация банахова пространства и изучаемый оператор расширяют на построенную комплексификацию. Тем не менее, при построении спектральной теории линейных операторов в вещественных банаховых пространствах возникает необходимость в подробном отслеживании как перехода в комплексификацию пространства, так и обратный переход. С этой целью вводится понятие симметричной суперразложимости линейного ограниченного оператора. Основными результатами второй главы являются следующие утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть X — вещественное банахово пространство, $T\colon G \to \operatorname{End} X$ — неквазианалитическое сильно непрерывное представление. Тогда операторы $T(g)$, $g \in G$, $T(f)$, $f \in \mathrm{L}_\alpha(G,\mathbb{R})$, где оператор $T(f)$ определён формулой*

$$T(f)x = \int\limits_G f(g)T(-g)x \, \mathrm{d}g, \quad x \in \mathscr{X},$$

симметрично суперразложимы.

Теорема 2.2. *Пусть $T \in \operatorname{End} X$ — обратимый оператор, для которого*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \|T^n\|}{1+n^2} < \infty.$$

Тогда оператор T является симметрично суперразложимым. Если $\sigma_{\mathbb{C}}(T)$ содержит более двух точек, то оператор T имеет нетривиальное инвариантное подпространство.

3. В третьей главе «Неравенства Бернштейна для векторов и операторов» установлены неравенства Бернштейна для операторов, действующих в банаховых пространствах. Указанные неравенства связывают норму оператора на векторе со спектральным радиусом этого вектора. В этой главе подробно излагается история вопроса и постановка задачи. Определяются понятия спектра Бёрлинга и спектрального радиуса вектора. Вводится в рассмотрение ряд однородных пространств функций, в частности, пространства Степанова. Для них также установлены аналоги неравенств типа Бернштейна и получена оценка операторов коммутирования. В качестве приложений полученных результатов отметим следующую теорему.

Теорема 3.3. *Если спектр Бёрлинга $\Lambda(X,T)$ оператора $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ является компактным множеством, то справедливо следующее неравенство*

$$\left\|\mathrm{ad}_{A_1,A_2} X\right\| \leqslant \mathrm{r_B}(X) \cdot \|X\|,$$

где $\mathrm{r_B}(X) = \max\limits_{\lambda \in \Lambda(X)} |\lambda|$.

Далее вводится понятие целых на бесконечности функций экспоненциального типа. Для таких функций также получен аналог неравенства Бернштейна.

Теорема 3.4. *Если спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$ функции $x \in \mathcal{F}$ является компактным множеством, то x допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа $\sigma = \mathrm{r_B}(x)$ и для производной $x^{(k)}$, $k \geqslant 1$, имеют место оценки $\left\|x^{(k)}\right\|_{\mathcal{F}} \leqslant \sigma^k \|x\|_{\mathcal{F}}, \quad k \geqslant 1$.*

Ещё один ряд важных результатов относится к случаю, когда исследуемый оператор является генератором растущей группы операторов. Рассматривается группа операторов (представление) $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, допускающих оценку

$$\|T(t)\| \leqslant \alpha(t) = \mathrm{c}_1(1+\mathrm{c}_2|t|)^{\gamma}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\mathrm{c}_1 \geqslant 1$, $\mathrm{c}_2 \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$.

Теорема 3.5. *Пусть вес $\alpha(t) = \|T(-t)\|$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию (1) с $0 < \gamma < 1$. Тогда любой вектор $x \in \mathcal{X}$ с компактным спектром Бёрлинга $\Lambda(x)$ принадлежит области определения оператора A. Имеет место представление*

$$Ax = \mathrm{r_B}(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi-\pi}{r(x)}\right)x}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}$$

и оценка $\|Ax\| \leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{B},\alpha}\big(\mathrm{r_B}(x)\big) \cdot \|x\|, \quad n \geqslant 1$.

4. В четвертой главе «Неравенства Бора-Фавара и метод подобных операторов» получены результаты обобщающие неравенства Бора-Фавара для операторов. Классический результат Х. Бора состоит в оценке нормы интегрального оператора через показатели Фурье, участвующие в оценках периодических функций. Интерес к таким оценкам был постоянным и соответствующие оценки распространялись Ж. Фаваром и Б. М. Левитаном на почти периодические функции. В этой главе рассматривается сильно непрерывное представление $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, где $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство, с генератором $\mathrm{i}A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(y)$ вектора y из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля (X,T) не содержит нуля. Тогда существует единственный вектор $x \in \mathrm{D}(A)$ такой, что: 1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y)$; 2) $x \in \mathrm{D}(A)$; 3) $Ax = y$; 4) $\|x\| \leqslant \dfrac{\pi}{2\operatorname{dist}(0,\Lambda(y))}\|y\|$.*

Отметим также следующий интересный результат.

Теорема 4.4. *Пусть вектор $y \in \mathscr{X}$ представим в виде $y = y_0 + y_1$, где $\Lambda(y_0) \subset [-a,a]$ и $\Lambda(y_1) \subset \mathbb{R} \setminus (-b,b)$, где $0 \leqslant a < b$. Тогда существует единственный вектор $x \in \mathscr{X}$ со свойствами: 1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y_1) \subset (-\infty,-b] \cup [b,+\infty)$; 2) $x \in \mathrm{D}(A)$; 3) $Ax = y_1 = y - y_0$; 4) $\|x\| \leqslant \dfrac{\pi}{2b}\Big(1 + \dfrac{4}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{b+a}{b-a}\Big)\|y\|$.*

В связи с приложениями к теории возмущений, в следующей теореме получены оценки обратных операторов коммутирования.

Теорема 4.6. *При условии $\frac{\pi}{\mathrm{d}}\sqrt{\|C\|\cdot\|D\|} < 1$ операторы $\mathbb{A}$ и $\mathcal{A} - \mathrm{J}X^{(0)}$ подобны, где $X^{(0)}$ — единственное решение системы (4.15) и*

$$\mathrm{J}X^{(0)} = \begin{pmatrix} X_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & X_{22}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Укажем также ещё одно приложение к функциям из однородных пространств.

Теорема 4.7. *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(y)$ функции y из однородного пространства функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathscr{X})$ не содержит нуля. Тогда существует единственная функция $x \in \mathcal{F}^{(1)} = \mathcal{F}^{(1)}(\mathbb{R},\mathscr{X})$ такая, что: 1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y)$; 2) $x' = y$; 3) $\|x\|_{\mathcal{F}} \leqslant \dfrac{\pi}{2\operatorname{dist}(0,\Lambda(y))}\|y\|_{\mathcal{F}}$.*

3. Стиль изложения и полнота отражения результатов диссертационного исследования в публикациях. Изложение результатов диссертационной работы ясное и подробное. В библиографии хорошо изложена история рассматриваемой проблемы. Все основные результаты являются новыми и строго доказанными методами спектральной теории линейных операторов. Содержание автореферата правильно и полно отражает содержание диссертации. Основные результаты диссертационного исследования в полной мере представлены в девяти научных работах, из них три опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

4. Соответствие диссертации паспорту специальности. Диссертация соответствует квалификационным требованиям п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней и требованиям паспорта специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

5. Замечания. Замеченные оппонентом погрешности изложения.

1. В формуле (1.2) диссертации в правой части неравенства пропущена постоянная C.

2. На с. 36 диссертации ссылка литературные источники дана с опечаткой.

3. В теореме 2.1 и в диссертации, и в автореферате в правой части равенства пропущен вектор x, к которому применяется оператор.

4. На с. 43 и в диссертации и в автореферате написано, что iA — генератор $T(t)$, а следом в теореме 2.3 уже оператор A — генератор $T(t)$.

5. Во 2-й главе диссертации есть указания на несуществующие теоремы 1 – 3.

6. На с. 65 диссертации читающего отсылают к ряду работ за ознакомлением с используемыми результатами и терминами, не приводя их конкретно. В частности, это относится к такому часто используемому понятию как спектр Бёрлинга оператора.

Стоит отметить, что указанные недочеты являются легко устранимыми и не влияют на общее положительное впечатление от работы.

Считаю, что диссертация Дикарева Егора Евгеньевича «Гармонический анализ некоторых классов линейных операторов» представляет законченную научно-исследовательскую работу, в полной мере отвечающую всем критериям п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней и соответствует специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор Дикарев Егор Евгеньевич безусловно заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук.

4 мая 2016 года

Доктор физико-математических наук, профессор
федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего
образования «Белгородский государственный
национальный исследовательский университет» А.В. Глушак

Личную подпись удостоверяю
Документовед управления по развитию персонала и кадровой работе
А.В.
Т.А. Априщенко
«04» мая 2016 г.

Александр Васильевич Глушак
Служебный адрес: 308015, г. Белгород, 85,
НИУ «БелГУ», ИИТиЕН,
e-mail: Glushak@bsu.edu.ru
тел.: +7 904 081 3978